

FACULTIES OF ARTS AND SCIENCE
B.A. / B.Sc. III-Year Examination, March / April - 2014
Subject : MATHEMATICS
Paper - III
Linear Algebra and Vector Calculus

Time : 3 Hours

Max: Marks : 100

نوٹ : ہر ایک اکائی سے کم از کم ایک سوال کا انتخاب کر کے سیکشن A سے کوئی 6 سوال اور سیکشن B سے کوئی 4 سوال حل کیجئے۔
 سیکشن A کے ہر سوال کے 6 اور سیکشن B کے ہر سوال کے 16 نشانات مقرر ہیں۔

سیکشن A- (6x6=36Marks)

اکائی-I

1. ثابت کیجئے کہ کوئی دو تحت فضاں w_1 اور w_2 جو ایک سمتی فضاء $V(F)$ کے ہیں، کے تقاطع (intersection) بھی $V(F)$ کے تحت فضاء ہے۔
2. اگر $U(F)$ اور $V(F)$ دو سمتی فضاں ہیں اور U سے V میں ایک خطی استحال ہے تو ثابت کیجئے کہ T کا وسعت $V(\text{range})$ کا ایک تحت فضاء ہے۔

اکائی-II

3. $Matrix \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ کے کل Eigen قدر (Values) اور Eigen سمتے (Vectors) دریافت کیجئے۔
4. ایک وحدانیہ (unit) $0 \leq t \leq 1$ پر تمام مسلسل ملٹف (complex) قدری تقاطع کے $v(d)$ ایک سمتی فضاء ہو اور اگر $f(t), g(t) \in v$ تو ثابت کیجئے کہ $v(c)$ پر اندرونی ضربیہ (product) جس کی تعریف $f(t), g(t) = \int_0^1 f(t) \cdot g(\bar{t}) dt$ کے ذریعہ کی ہے ایک اندرونی ضربیہ فضاء ہے

اکائی-III

5. تشخیص قدر کیجئے : $\int_c (3xydx - y^2 dy)$ جہاں C مستوی xy میں ایک منحنی ہے اور $(0,0)$ سے $(1,2)$ تک $y = 2x^2$ ہیں۔

$$6. \text{ تشخیص قدر کیجئے : } \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dx dy$$

اکائی-IV

7. اگر $a = x + y + z$, $b = x^2 + y^2 + z^2$, $c = xy + yz + 2x$ تو ثابت کیجئے کہ $[\text{grad } a, \text{grad } b, \text{grad } c] = 0$
8. دریافت کیجئے : $\int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$ جہاں $\vec{F} = xyi + yzj + zzk$ اور منحنی C , $\vec{r} = ti + t^2j + tk^2$ کا تغیر (varying) '1' سے '1' تک ہے۔

سیکشن B- (4x16=64Marks)

اکائی-I

- a.9 ہر ایک محدود ابعادی سمتی فضاء (finite dimensional vector space) کے لئے ایک بنیاد وجود ہوتی ہے یہ ثابت کیجئے۔
- b) ثابت کیجئے کہ V_3R تین سمتے کا نظام $(1,3,2)$, $(1,-7,-8)$, $(2,1,-1)$ خطی طور پر منحصر ہے۔

Rank-Nullity مسئلہ بیان کر کے ثابت کیجئے۔ (a.10)

(b) ثابت کیجئے کہ تنقیش $T: V_2(R) \rightarrow V_3(R)$ ، جس کی تعریف $T(a,b) = (a+b, a-b, b)$ طرکی ہے، ایک خطی استحالہ $V_2(R)$ سے $V_3(R)$ کے اندر ہے۔ Rank اور Null Space دریافت کیجئے۔

اکائی-II

(a.11) ثابت کیجئے کہ Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ وترانی پذیر نہیں ہے۔

(b) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ کا Modal Matrix 'P' تعین کیجئے۔

(a.12) ثابت کیجئے کہ ہر ایک محدود ابعادی اندری حاصل ضربی کا ایک عمود نارمل بنیاد ہوتا ہے۔

(b) اگر $V(R)$ اندرونی حاصل ضربی کے ساتھ کثیر رکنی کا $V(R)$ اگر ایک سمتی فضاء ہے جس کی تعریف $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt \forall f, g \in V$

اور $t \in [0,1]$ ہے تو $f(x) = x^2 + x - 4$ ، $g(x) = x - 1 \forall x \in [0,1]$ کے لئے $\langle f, g \rangle$ اور $\|g\|$ دریافت کیجئے۔

اکائی-III

(a.13) ثابت کیجئے $\int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right\} dx \neq \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right\} dy$

(b) تشخیص قدر کیجئے: $\iint xy(x^2 + y^2) dx dy$ over $[0, a; 0, b]$

(a.14) تکمیل کی ترتیب تبدیل کیجئے اور تشخیص قدر کیجئے۔ $\int_0^{4a} \int_{x^2/a}^{2\sqrt{ax}} dy dx$

(b) تشخیص قدر کیجئے: $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{\cos^2 \theta}} \frac{r}{(1+r^2)^2} d\theta dr$

اکائی-IV

(a.15) دریافت کیجئے $\int_x \bar{F} \cdot \bar{N}$ جہاں $\bar{F} = 182i - 12j + 3yk$ اور پہلے octant میں واقع مستوی $2x + 3y + 6z = 12$ کا حصہ ہے۔

(b) $div \bar{F}$ اور $Curl \bar{F}$ دریافت کیجئے جہاں $F = grad(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

(a.16) ایک مستوی میں Green کا مسئلہ بیان کیجئے اور ثابت کیجئے۔

(b) کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ کے اوپر $\int_x (ax^2 + by^2 + cz^2) dv$ کا حساب کیجئے۔

☆☆☆